Solución:

Nombre y código: ______________________________ 1

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

MATE1208 Cálculo Vectorial (Honores)
Primer Parcial — (24/08/2010) A[1]

Sección 01: Profesor: José Ricardo ARTEAGA B.

Prob.	1	2	3	4	Total
Valor	10	10	10	20	50
Puntos					

```
Escriba todo su análisis si desea recibir el máximo valor en cada punto.
Respuesta sin justificar se invalida.
No puede usar calculadora
```

Problema 1. [10 Ptos.] Llene la casilla en blanco con F (Falso) o V (Verdadero), según sea el caso. En todos los casos todas las matrices son cuadradas $n \times n$. No olvide la justificación.

a) [**5 pt.**] La rapidez de una partícula con función posición $\mathbf{r}(t) = 4\sqrt{2}t\mathbf{i} + e^{4t}\mathbf{j} + e^{-4t}\mathbf{k}$ es:

$\nu = 4(e^{4t} + e^{-4t}) = 8\cosh 4t$. V

b) [**5 pt.**] El vector posición de una partícula que tiene aceleración $\mathbf{a}(t) = 10\mathbf{i} + 14\mathbf{j} + (18t + 4)\mathbf{k}$, velocidad inicial $\mathbf{v}(0) = 5\mathbf{j}$ y posición inicial $\mathbf{r}(0) = 12\mathbf{i} + \mathbf{k}$ es:

$\mathbf{r}(t) = (5t^2 + 12t)\mathbf{i} + (7t^2 + 5)\mathbf{j} + (3t^3 + 2t^2 + t)\mathbf{k}$ .... F

Solución:

a) $\vec{r}'(t) = \langle 4\sqrt{2}, 4e^{4t}, -4e^{-4t} \rangle$

$\nu = \|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{32 + 16e^{8t} + 16e^{-8t}}$

$\nu = 4\sqrt{e^{8t} + 2 + e^{-8t}} = 4\sqrt{(e^{4t} + e^{-4t})^2}$

$\boxed{\nu = 4(e^{4t} + e^{-4t})}$

b) $\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t)\,dt = \langle 10t + c_1, 14t + c_2, 9t^2 + 4t + c_3 \rangle$

$\vec{v}(0) = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle = \langle 0, 5, 0 \rangle \Rightarrow \boxed{c_1 = 0, c_2 = 5, c_3 = 0}$

$\vec{v}(t) = \langle 10t, 14t + 5, 9t^2 + 4t \rangle$

$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t)\,dt = \langle 5t^2 + d_1, 7t^2 + 5t + d_2, 3t^3 + 2t^2 + d_3 \rangle$

$\vec{r}(0) = \langle d_1, d_2, d_3 \rangle = \langle 12, 0, 1 \rangle \Rightarrow \boxed{d_1 = 12, d_2 = 0, d_3 = 1}$

[1] El juramento del uniandino dice: "Juro solemnemente abstenerme de copiar o de incurrir en actos que pueden conducir a la trampa o al fraude en las pruebas académicas, o en cualquier otro acto que perjudique la integridad de mis compañeros o de la misma Universidad"

$\boxed{\vec{r}(t) = \langle 5t^2 + 12, 7t^2 + 5t, 3t^3 + 2t^2 + 1 \rangle}$

Problema 2. [10 Ptos.] Suponga que una partícula que va siguiendo la trayectoria $\mathbf{r}(t) = <2t, t^2, \ln t>$, $(t \geq 1)$ sale por la tangente en $t = 2$.

a) **[5 pt.**] Calcule las coordenadas del punto en que se encuentra en el instante $t = 4$.

b) **[5 pt.**] Calcule la distancia recorrida por la partícula desde $t = 1$ hasta el instante $t = 4$.

Sol: $\vec{r}(1) = \langle 2, 1, 0 \rangle$

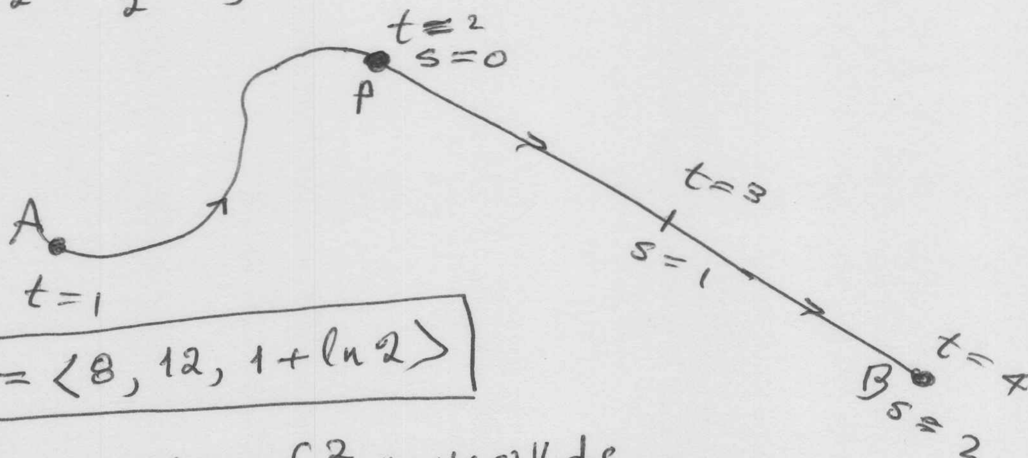
$\vec{r}(t) = \langle 2t, t^2, \ln t \rangle \longrightarrow \vec{r}\,'(t) = \langle 2, 2t, \frac{1}{t} \rangle; \quad t \geq 1$

$\vec{r}(2) = \langle 4, 4, \ln 2 \rangle = P \quad \vec{r}\,'(2) = \langle 2, 4, \frac{1}{2} \rangle = \vec{v}$

Recta tangente. Necesitamos un punto P y un vector director $\vec{v}$

Sea $\alpha(s)$ la parametrización de la recta tangente en $t = 2$

$$\begin{cases} x = 4 + 2s \\ y = 4 + 4s \\ z = \ln 2 + \frac{1}{2}s \end{cases} \Rightarrow \alpha(s) = \langle 4 + 2s, 4 + 4s, \ln 2 + \frac{1}{2}s \rangle$$



a) $\boxed{B = \alpha(2) = \langle 8, 12, 1 + \ln 2 \rangle}$

b) $L = \int_1^2 \|\vec{r}\,'(t)\| dt + \int_0^2 \|\alpha'(s)\| ds$

$L = \int_1^2 \sqrt{4 + 4t^2 + \frac{1}{t^2}}\, dt + \int_0^2 \sqrt{4 + 16 + \frac{1}{4}}\, ds$

$L = \int_1^2 \sqrt{\frac{4t^4 + 4t^2 + 1}{t^2}}\, dt + \int_0^2 \sqrt{\frac{80 + 1}{4}}\, ds$

$L = \int_1^2 \frac{\sqrt{(2t^2 + 1)^2}}{t}\, dt + \frac{9}{2} \int_0^2 ds$

$L = \int_1^2 (2t + \frac{1}{t})\, dt + 9 = (t^2 + \ln t)\Big|_1^2 + 9$

$L = 3 + \ln 2 + 9 \Longrightarrow \boxed{L = 12 + \ln 2}$

Nombre y código: ______________________________

Problema 3. [10 Ptos.] El radio de curvatura R_c de una curva suave C en un punto donde su curvatura[2] no sea cero es el recíproco es ésta, es decir $R_c = \frac{1}{\kappa}$.

a)[**5 pt.**] Calcule el radio de curvatura de la curva $y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

b)[**5 pt.**] Muestre que su radio de curvatura R_c en el punto (x, y) es y^2.

Nota: *Considere la curva C inmersa en* $\mathbf{R}^3$, $\mathbf{r}(t) = < x(t), y(t), 0 >$.

Sol

$x(t) = t$

$y(t) = \cosh t$

$\vec{r}(t) = \langle t, \cosh t, 0 \rangle$

$\vec{r}'(t) = \langle 1, \sinh t, 0 \rangle$

$\vec{r}''(t) = \langle 0, \cosh t, 0 \rangle$

$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = \langle 0, 0, \cosh t \rangle \Rightarrow \|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\| = \cosh t$

$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{1 + \sinh^2 t} = \cosh t$

$\Rightarrow \kappa(t) = \frac{\cosh t}{\cosh^3 t} = \frac{1}{\cosh^2 t}$

a) $\boxed{R_c(t) = \cosh^2 t}$

b) $R_c(x, y) = y^2$

---

[2] $\kappa = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$

Problema 4. [20 Ptos.]

a) [**5 pt.**] Encuentre la ecuación lineal del plano α determinado por los puntos $A(2, 1, -3)$, $B(5, -1, 4)$, $C(2, -2, 4)$.

b) [**5 pt.**] Encuentre la ecuación del plano β ortogonal a la recta $x = 1 + 2t, y = 2 - 3t, z = 3 - t$, y que pasa por $A(2, 1, -3)$.

c) [**5 pt.**] Encuentre la ecuación paramétrica de la recta intersección de los planos $7x - 21y - 9z = 20$, y, $2x - 3y - z = 4$

c) [**5 pt.**] Encuentre la ecuación paramétrica de la recta que pasa por $A(2, 1, -3)$, es paralela al plano $7x - 21y - 9z = 20$ y es perpendicular a la recta $x = 1 + 2t, y = 2 - 3t, z = 3 - t$.

Sol.:

a) $\vec{u} = \overrightarrow{BA} = \langle -3, 2, -7 \rangle$

$\vec{v} = \overrightarrow{BC} = \langle -3, -1, 0 \rangle$

$\vec{n}_1 = \vec{u} \times \vec{v} = \langle -7, 21, 9 \rangle$

$\Rightarrow \begin{cases} -7x + 21y + 9z = d \\ d = -7(2) + 21(1) + 9(-3) \\ d = -20 \end{cases}$

a) $\boxed{7x - 21y - 9z = 20}$

b) $\vec{n}_2 = \langle 2, -3, -1 \rangle$ $P = A$

$2x - 3y - z = d$

$d = 2(2) - 3(1) - 1(-3)$

$d = 4 - 3 + 3 = 4$

$\Rightarrow$ Explicación: En cualquiera de los casos necesitamos un punto y un vector

b) $\boxed{2x - 3y - z = 4}$

c) Dado que los planos son los pedidos por a) y b) $\Rightarrow A \in$ ambos planos

$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 7 & -21 & -9 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = \langle -6, -11, 21 \rangle$

$\boxed{\begin{cases} x = 2 - 6t \\ y = 1 - 11t \\ z = -3 + 21t \end{cases}}$

d) $P = A$ El problema es el mismo anterior, porque

$\vec{v} = \vec{n} \times \vec{v}_1 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 7 & -21 & -9 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = \langle -6, -11, 21 \rangle$

$\boxed{\begin{cases} x = 2 - 6t \\ y = 1 - 11t \\ z = -3 + 21t \end{cases}}$

Tiempo: 70 minutos
Buena Suerte!